1) حدد حيز تعريف الدالة f في كل من الحالات التالية:

$1)\ f(x)=\ln(4+x)$ $\quad 2)\ f(x)=\ln(-x)$ $\quad 3)\ f(x)=\ln|x^2+3x|$

$4)\ f(x)=\ln(|x|-2)$ $\quad 5)\ f(x)=\dfrac{x^2-x}{\ln x}$ $\quad 6)\ f(x)=\sqrt{\ln x}$

$7)\ f(x)=\ln((x-3)(x+2))$ $\quad 8)\ f(x)=\ln(x-3)+\ln(x+2)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$1)\ \ln(x-2)=\ln(3-x)$ $\quad 2)\ \ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln 6$

$3)\ \ln(x^2+2x-2)=0$ $\quad 4)\ \ln(x-3)-\ln(2-x)=\ln x$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $1)\ln(2x^2-x)\succ 0$ $\quad 2)\ln|x-1|\leq\ln 3$ $\quad 3)\ln(x-2)-\ln(x+1)\prec 0$

4) بسط التعبيرين التاليين :

$1)\ \ln(\sqrt{2}+1)^{2011}+\ln(\sqrt{2}-1)^{2011}$ $\quad 2)\ \ln^2(2-\sqrt{3})-\ln^2(2+\sqrt{3})$

5) ليكن a و b من $]0;+\infty[$ أكتب بدلالة $\ln a$ و $\ln b$

$$\ln\left(\frac{b^4}{a^3}\right)+\ln(\sqrt{a})-\ln(b^2\sqrt[3]{a})$$

6) احسب النهايات : $1)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln^2 x$ $\quad 2)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln^5 x$ $\quad 3)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}\ln^2 x$

$4)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ $\quad 5)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^5 x}{x^2}$ $\quad 6)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad 7)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x^3}$

$8)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-5}{x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$ $\quad 10)\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3\ln(-x)$

$11)\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-x)\ln(x-1)$ $\quad 12)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3-2x-\ln x$ $\quad 13)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\ln(x+5)$

$14)\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln(x^2-1)$ $\quad 15)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x-1)-\ln(x))$ $\quad 16)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}$

7) ادرس قابلية اشتقاق f ثم احسب مشتقتها :

$1)\ f(x)=x^2+2+\ln(-x)$ $\quad 4)\ f(x)=\ln|1-\ln x|$ $\quad 5)\ f(x)=\ln(\sqrt{x+1})$

$2)\ f(x)=(x^2-3x)\ln(x^2)$ $\quad 7)\ f(x)=(\ln(x+2))^2$ $\quad 8)\ f(x)=\ln|\ln x|$

$3)\ f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ $\quad 6)\ f(x)=\dfrac{1}{3+\ln x}$

8) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\log_2\sqrt{x+2}+\log_4(x-2)=2$

9) لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ و $U_1=2$

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $V_n=\log(U_n)$

بين أن $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول

10) لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1- بين أن $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ **ثم استنتج منحى تغيرات g على** $]0;+\infty[$

2- بين أن $\forall x\in]0;1]\ ;\ g(x)\leq 0$ **و أن** $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$ **(لاحظ أن** $g(1)=0$ **)**

B) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ب : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$

ليكن (C) **المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ **(يمكن وضع** $t=\sqrt{x}$ **) ثم احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب- تحقق من أن $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ **لكل x من** $]0;+\infty[$

ج- احسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ **(يمكن وضع** $t=\frac{1}{x}$ **) ثم أول النتيجة هندسيا.**

د- بين أن (C) **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته هي:** $y=x$

2- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ **لكل x من** $]0;+\infty[$ **،ثم ضع جدول تغيرات الدالة f**

3- أنشئ المنحنى (C) **في المعلم** $(O,\vec{i},\vec{j})$

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ب: $g(x)=x-2\ln x$

أ- احسب $g'(x)$ **لكل x من** $]0;+\infty[$

ب- بين أن g تزايدية على $[2;+\infty[$ **و تناقصية على** $]0;2]$

استنتج أن $g(x)\succ 0$ **لكل x من** $]0;+\infty[$ **(لاحظ أن** $g(2)\succ 0$ **)**

II- لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $f(x)=x-(\ln x)^2$

وليكن (C) **المنحنى الممثل للدالة f في معلم م. م.** $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ **و أول النتيجة هندسيا**

2- أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ **(ضع** $t=\sqrt{x}$ **)** **ب- استنتج أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **و أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

ج- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ **ثم استنتج أن** (C) **يقبل ، بجوار** $+\infty$ **، فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم** (Δ) **ذو المعادلة** $y=x$ **.**

د- بين أن المنحنى (C) **يوجد تحث المستقيم** (Δ)

3-أ- بين أن $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ **و بين أن f تزايدية قطعا على** $]0;+\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

ج- بين أن $y=x$ **هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى** (C) **في النقطة التي أفصولها 1**

4- بين أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **في** $]0;+\infty[$ **و أن** $\frac{1}{e}\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$ **(نقبل** $(\ln 2)^2\prec\frac{1}{2}$ **)**

5- أنشئ (C) **و المستقيم** (Δ) **في** $(O;\vec{i};\vec{j})$ **(نقبل أن** $I(e;e-1)$ **نقطة انعطاف ل** (C)

III- نعتبر المتتالية (U_n) **بحيث:** $U_0=2$ **و** $U_{n+1}=f(U_n)$

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 1\leq U_n\leq 2$ **(استعمل نتيجة السؤال II-3- أ-)**

2- بين أن المتتالية (U_n) **تناقصية**

3- استنتج أن (U_n) **متقاربة ثم حدد نهايتها .**

الامتحان الوطني الدورة العادية 2008